

TD 20-21-22 : Polynômes et fractions rationnelles

Degré, dérivation

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le degré et les coefficients des polynômes suivants :

$$P = (X + 1)^n - (X - 1)^n \quad Q = (X(1 - X))^n$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue(s) $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

- 1) $XP = P'$
- 2) $P = XP'$
- 3) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
- 4) $P \circ P = P$
- 5) $Q^2 = XP^2$
- 6) $P = P'P''$

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $P(X + 1) - P(X)$ en fonction du degré de P .

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes P tels que $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$ et $P^{(n)}(2) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Montrer que f n'est pas une fonction polynômiale.

Divisibilité de polynômes

Exercice 6. Déterminer $p, q \in \mathbb{R}$ pour que $X^3 + pX + q$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
- 2) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice 8. Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que B divise A dans $\mathbb{C}[X]$, i.e. qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = BQ$. Montrer que $Q \in \mathbb{R}[X]$ (i.e. que B divise A dans $\mathbb{R}[X]$).

Exercice 9. On pose $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$. Déterminer $A \wedge B$ puis un couple de coefficients de Bézout pour A et B .

Exercice 10. On pose $A = X^4 + 1$ et $B = X^3 - 1$. Déterminer $A \wedge B$, $A \vee B$ et un couple de coefficients de Bézout.

Exercice 11 (Un grand classique). Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) On suppose que $m \mid n$. Montrer que $X^m - 1 \mid X^n - 1$.
- 2) Montrer que si la division euclidienne de n par m est donnée par $n = mq + r$, alors la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est donnée par $X^n - 1 = (X^m - 1)Q + (X^r - 1)$ où Q un polynôme que l'on précisera.
- 3) (*) Montrer que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.

Conséquence de la question 3 : $m \wedge n = 1$ si et seulement si $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X - 1$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de la racine 1 pour le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n := 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots + \frac{1}{n!}X^n$. Montrer que P_n n'admet pas de racine multiple.

Exercice 14. Montrer que 1 est racine triple de $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15. Déterminer $m > 0$ de sorte que $P = X^3 - 6X + m$ admette une racine double. Quelle est l'autre racine ?

Exercice 16. Que vaut la somme des éléments de \mathbb{U}_n (racines n -ièmes de l'unité) ? Que vaut leur produit ?
Indication : on pourra considérer le polynôme $P = X^n - 1$.

Exercice 17 (Une piqûre de rappel !). Déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} a + b = i \\ ab = -2 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } a, b \in \mathbb{C}. \qquad 2) \begin{cases} a + b + c = -2 \\ ab + bc + ca = -1 \\ abc = 2 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Indication : on pourra considérer le polynôme $P = (X - a)(X - b)(X - c)$.

Exercice 18. Soit $T > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si la fonction $f : x \mapsto P(x)$ est T -périodique, alors P est constant.

Exercice 19. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- 1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X) - X$ divise $P(X)^k - X^k$.
- 2) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
- 3) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 20. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.
Indication : utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 21. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) = n^2$. Montrer que $P = X^2$.

Exercice 22 (*). Trouver les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' \mid P$.
Indication : si $\deg P \geq 2$, utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Calculer $(X - 1)P(X)$. En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur \mathbb{C} .

Exercice 24. Factoriser les polynômes suivants, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_1 = X^4 - 1$$

$$P_2 = X^2 + X + 1$$

$$P_3 = X^3 - 2$$

$$P_4 = X^4 + X^2 + 1$$

$$P_5 = X^5 + X^4$$

$$P_6 = X^6 + 1$$

Exercice 25. Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice 26. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$$

$$(ii) \quad \exists A, B \in \mathbb{R}[X] \quad P = A^2 + B^2$$

Indication : on pourra passer dans les complexes.

Polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 27. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que

$$1) \quad P(1) = 2, P(2) = 3 \text{ et } P(3) = 6.$$

$$2) \quad P(1) = a, P(2) = b \text{ et } P(3) = c \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Fractions rationnelles

Exercice 28. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\bullet F_1 = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$$

$$\bullet F_3 = \frac{1}{X^2(X-1)^2}$$

$$\bullet F_5 = \frac{4}{(X^2 + 1)^2}$$

$$\bullet F_7 = \frac{1}{X^4 + X^2 + 1}$$

$$\bullet F_2 = \frac{2X}{X^4 - X^2}$$

$$\bullet F_4 = \frac{1}{X^2 + X + 1}$$

$$\bullet F_6 = \frac{1}{X^3 + 1}$$

$$\bullet F_8 = \frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$$

Exercice 29. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 30. Soit un entier $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

Exercice 31. Soit $F = \frac{1}{(X+1)^3(X-1)^3}$. Étudier la parité de F puis obtenir sa décomposition en éléments simples.

En déduire des polynômes U et V tels que $(X-1)^3U + (X+1)^3V = 1$.

Exercice 32. 1) Déterminer la décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X(X+1)}$.

2) En déduire pour tout $n \geq 1$ la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

3) Procéder de même pour calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 33 (*). Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{X}{X^4 + X^2 + 1}$.

En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.